Espacios simétricos espectralmente distinguidos

Emilio Lauret
INMABB & Dep. Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca, Junio 7–9, 2023.

Geometría espectral inversa

(M, g): variedad Riemanniana compacta, conexa, y sin borde.
$\Delta =$ el operador de Laplace–Beltrami.
$\mathrm{Spec}(M, g)$:

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \cdots, \ \lambda_k(M, g) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pregunta general

¿En qué medida el espectro determina la geometría?

Definición

(M, g) y (M', g') se dicen isospectrales si $\mathrm{Spec}(M, g) = \mathrm{Spec}(M', g')$.

- Existen muchos ejemplos de variedades isospectrales pero no isométricas.
- Si $\mathrm{Spec}(M, g) = \mathrm{Spec}(M', g')$, entonces $\dim M = \dim M'$, $\mathrm{vol}(M, g) = \mathrm{vol}(M', g')$, $\int_M \mathrm{scal}_g \, dV_g = \int_{M'} \mathrm{scal}_{g'} \, dV_{g'}$.

Geometría espectral inversa

(M, g): variedad Riemanniana compacta, conexa, y sin borde.
$\Delta =$ el operador de Laplace–Beltrami.
Spec(M, g):

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \cdots, \ \lambda_k(M, g) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pregunta general

¿En qué medida el espectro determina la geometría?

Definición

(M, g) y (M', g') se dicen isospectrales si Spec$(M, g) =$ Spec(M', g').

- Existen muchos ejemplos de variedades isospectrales pero no isométricas.
- Si Spec$(M, g) =$ Spec(M', g'), entonces $\dim M = \dim M'$, $\mathrm{vol}(M, g) = \mathrm{vol}(M', g')$, $\int_M \mathrm{scal}_g \, dV_g = \int_{M'} \mathrm{scal}_{g'} \, dV_{g'}$.

Geometría espectral inversa

(M, g): variedad Riemanniana compacta, conexa, y sin borde.
$\Delta =$ el operador de Laplace–Beltrami.
$\mathrm{Spec}(M, g)$:

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leq \lambda_2(M,g) \leq \cdots, \ \lambda_k(M,g) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pregunta general

¿En qué medida el espectro determina la geometría?

Definición

(M, g) y (M', g') se dicen isospectrales si $\mathrm{Spec}(M, g) = \mathrm{Spec}(M', g')$.

- Existen muchos ejemplos de variedades isospectrales pero no isométricas.
- Si $\mathrm{Spec}(M, g) = \mathrm{Spec}(M', g')$, entonces $\dim M = \dim M'$, $\mathrm{vol}(M, g) = \mathrm{vol}(M', g')$, $\int_M \mathrm{scal}_g \, dV_g = \int_{M'} \mathrm{scal}_{g'} \, dV_{g'}$.

Geometría espectral inversa

(M, g): variedad Riemanniana compacta, conexa, y sin borde.
$\Delta =$ el operador de Laplace–Beltrami.
$\mathrm{Spec}(M, g)$:

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \cdots, \; \lambda_k(M, g) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pregunta general

¿En qué medida el espectro determina la geometría?

Definición

(M, g) y (M', g') se dicen isospectrales si $\mathrm{Spec}(M, g) = \mathrm{Spec}(M', g')$.

- Existen muchos ejemplos de variedades isospectrales pero no isométricas.
- Si $\mathrm{Spec}(M, g) = \mathrm{Spec}(M', g')$, entonces $\dim M = \dim M'$, $\mathrm{vol}(M, g) = \mathrm{vol}(M', g')$, $\int_M \mathrm{scal}_g \, dV_g = \int_{M'} \mathrm{scal}_{g'} \, dV_{g'}$.

Variedades espectralmente distinguidas

Se espera que variedades Riemannianas con propiedades geométricas especiales[1] sean espectralmente distinguidas
(i.e. cualquier variedad isospectral a ella es en realidad isométrica).

Teorema [Tanno, 1973]

Una esfera redonda de dimensión $n \leq 6$ es espectralmente única entre las variedades Riemannianas orientables.

Estrategia propuesta por Gordon-Sutton (2010)

Mostrar resultados de unicidad espectral dentro del espacio de variedades Riemannianas homogéneas.

Definición

(M, g) se dice homogénea si $\mathrm{Iso}(M, g)$ actúa transitivamente en M.

[1] e.g. curvatura seccional constante, estructuras simétricas, ser Einstein, etc.

Variedades espectralmente distinguidas

Se espera que variedades Riemannianas con propiedades geométricas especiales[1] sean espectralmente distinguidas
(i.e. cualquier variedad isospectral a ella es en realidad isométrica).

Teorema [Tanno, 1973]

Una esfera redonda de dimensión $n \leq 6$ es espectralmente única entre las variedades Riemannianas orientables.

Estrategia propuesta por Gordon-Sutton (2010)

Mostrar resultados de unicidad espectral dentro del espacio de variedades Riemannianas homogéneas.

Definición

(M, g) se dice homogénea si $\mathrm{Iso}(M, g)$ actúa transitivamente en M.

[1] e.g. curvatura seccional constante, estructuras simétricas, ser Einstein, etc.

Variedades espectralmente distinguidas

Se espera que variedades Riemannianas con propiedades geométricas especiales[1] sean espectralmente distinguidas
(i.e. cualquier variedad isospectral a ella es en realidad isométrica).

Teorema [Tanno, 1973]

Una esfera redonda de dimensión $n \leq 6$ es espectralmente única entre las variedades Riemannianas orientables.

Estrategia propuesta por Gordon-Sutton (2010)

Mostrar resultados de unicidad espectral dentro del espacio de variedades Riemannianas homogéneas.

Definición

(M, g) se dice homogénea si $\mathrm{Iso}(M, g)$ actúa transitivamente en M.

[1] e.g. curvatura seccional constante, estructuras simétricas, ser Einstein, etc.

Unicidad espectral entre métricas invariantes a izquierda

$G =$ grupo de Lie compacto y conexo $\rightsquigarrow \frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)}$ espacio simétrico.
$\mathcal{M}^G := \{$métricas invariantes a izquierda en $G\}$
$\equiv \{$productos internos en $\mathfrak{g}\}$, esp. vect. de dim $= \binom{\dim G}{2}$

- (G, g) es homogénea para todo $g \in \mathcal{M}^G$.
- $\frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)} \simeq (G, g_0)$ para alguna métrica bi-invariante g_0 en G.

Pregunta

¿Es (G, g_0) espectralmente única en $\mathcal{M}^G$?

Teorema [Gordon, Schueth, Sutton, 2010]

Una métrica bi-invariante en G es espectralmente aislada en $\mathcal{M}^G$.
Es decir, existe un entorno abierto U de g_0 en $\mathcal{M}^G$ tal que
$\mathrm{Spec}(G, g_0) \neq \mathrm{Spec}(G, g)$ para todo $g \in U \smallsetminus \{g_0\}$.

Teorema [L., 2019]

Si $G = \mathrm{Sp}(n)$, entonces cualquier métrica bi-invariante es espectralmente única en todo el espacio $\mathcal{M}^G$.

Unicidad espectral entre métricas invariantes a izquierda

$G =$ grupo de Lie compacto y conexo $\rightsquigarrow \frac{G\times G}{\operatorname{diag}(G)}$ espacio simétrico.

$\mathcal{M}^G :=$ {métricas invariantes a izquierda en G}

$\equiv$ {productos internos en $\mathfrak{g}$}, esp. vect. de dim $= \binom{\dim G}{2}$

- (G, g) es homogénea para todo $g \in \mathcal{M}^G$.
- $\frac{G\times G}{\operatorname{diag}(G)} \simeq (G, g_0)$ para alguna métrica bi-invariante g_0 en G.

Pregunta

¿Es (G, g_0) espectralmente única en $\mathcal{M}^G$?

Teorema [Gordon, Schueth, Sutton, 2010]

Una métrica bi-invariante en G es espectralmente aislada en $\mathcal{M}^G$.
Es decir, existe un entorno abierto U de g_0 en $\mathcal{M}^G$ tal que $\operatorname{Spec}(G, g_0) \neq \operatorname{Spec}(G, g)$ para todo $g \in U \smallsetminus \{g_0\}$.

Teorema [L., 2019]

Si $G = \operatorname{Sp}(n)$, entonces cualquier métrica bi-invariante es espectralmente única en todo el espacio $\mathcal{M}^G$.

Unicidad espectral entre métricas invariantes a izquierda

$G =$ grupo de Lie compacto y conexo $\rightsquigarrow \frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)}$ espacio simétrico.

$\mathcal{M}^G :=$ {métricas invariantes a izquierda en G}

$\equiv$ {productos internos en $\mathfrak{g}$}, esp. vect. de dim $= \binom{\dim G}{2}$

- (G, g) es homogénea para todo $g \in \mathcal{M}^G$.
- $\frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)} \simeq (G, g_0)$ para alguna métrica bi-invariante g_0 en G.

Pregunta

¿Es (G, g_0) espectralmente única en $\mathcal{M}^G$?

Teorema [Gordon, Schueth, Sutton, 2010]

Una métrica bi-invariante en G es espectralmente aislada en $\mathcal{M}^G$.
Es decir, existe un entorno abierto U de g_0 en $\mathcal{M}^G$ tal que
$\mathrm{Spec}(G, g_0) \neq \mathrm{Spec}(G, g)$ para todo $g \in U \smallsetminus \{g_0\}$.

Teorema [L., 2019]

Si $G = \mathrm{Sp}(n)$, entonces cualquier métrica bi-invariante es espectralmente única en todo el espacio $\mathcal{M}^G$.

Unicidad espectral entre métricas invariantes a izquierda

$G =$ grupo de Lie compacto y conexo $\rightsquigarrow \frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)}$ espacio simétrico.

$\mathcal{M}^G :=$ {métricas invariantes a izquierda en G}

$\equiv$ {productos internos en $\mathfrak{g}$}, esp. vect. de dim $= \binom{\dim G}{2}$

- (G, g) es homogénea para todo $g \in \mathcal{M}^G$.
- $\frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)} \simeq (G, g_0)$ para alguna métrica bi-invariante g_0 en G.

Pregunta

¿Es (G, g_0) espectralmente única en $\mathcal{M}^G$?

Teorema [Gordon, Schueth, Sutton, 2010]

Una métrica bi-invariante en G es espectralmente aislada en $\mathcal{M}^G$.
Es decir, existe un entorno abierto U de g_0 en $\mathcal{M}^G$ tal que $\mathrm{Spec}(G, g_0) \neq \mathrm{Spec}(G, g)$ para todo $g \in U \smallsetminus \{g_0\}$.

Teorema [L., 2019]

Si $G = \mathrm{Sp}(n)$, entonces cualquier métrica bi-invariante es espectralmente única en todo el espacio $\mathcal{M}^G$.

Unicidad espectral entre métricas invariantes a izquierda

G = grupo de Lie compacto y conexo $\rightsquigarrow \frac{G \times G}{\mathrm{diag}(G)}$ espacio simétrico.
$\mathcal{M}^G :=$ {métricas invariantes a izquierda en G}
$\equiv$ {productos internos en $\mathfrak{g}$}, esp. vect. de dim $= \binom{\dim G}{2}$

- (G, g) es homogénea para todo $g \in \mathcal{M}^G$.
- $\frac{G \times G}{\mathrm{diag}(G)} \simeq (G, g_0)$ para alguna métrica bi-invariante g_0 en G.

Pregunta

¿Es (G, g_0) espectralmente única en $\mathcal{M}^G$?

Teorema [Gordon, Schueth, Sutton, 2010]

Una métrica bi-invariante en G es espectralmente aislada en $\mathcal{M}^G$.
Es decir, existe un entorno abierto U de g_0 en $\mathcal{M}^G$ tal que
$\mathrm{Spec}(G, g_0) \neq \mathrm{Spec}(G, g)$ para todo $g \in U \smallsetminus \{g_0\}$.

Teorema [L., 2019]

Si $G = \mathrm{Sp}(n)$, entonces cualquier métrica bi-invariante es espectralmente única en todo el espacio $\mathcal{M}^G$.

Unicidad espectral entre métricas invariantes a izquierda

$G =$ grupo de Lie compacto y conexo $\rightsquigarrow \frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)}$ espacio simétrico.

$\mathcal{M}^G := \{$métricas invariantes a izquierda en $G\}$
$\qquad \equiv \{$productos internos en $\mathfrak{g}\}$, esp. vect. de dim $= \binom{\dim G}{2}$

- (G, g) es homogénea para todo $g \in \mathcal{M}^G$.
- $\frac{G\times G}{\mathrm{diag}(G)} \simeq (G, g_0)$ para alguna métrica bi-invariante g_0 en G.

Pregunta

¿Es (G, g_0) espectralmente única en $\mathcal{M}^G$?

Teorema [Gordon, Schueth, Sutton, 2010]

Una métrica bi-invariante en G es espectralmente aislada en $\mathcal{M}^G$.
Es decir, existe un entorno abierto U de g_0 en $\mathcal{M}^G$ tal que
$\mathrm{Spec}(G, g_0) \neq \mathrm{Spec}(G, g)$ para todo $g \in U \smallsetminus \{g_0\}$.

Teorema [L., 2019]

Si $G = \mathrm{Sp}(n)$, entonces cualquier métrica bi-invariante es espectralmente única en todo el espacio $\mathcal{M}^G$.

Unicidad espectral en esferas homogéneas

Teorema [Schmidt, Sutton, 2014]

Dos métricas homogéneas en S^3 son isospectrales si y sólo si son isométricas.

Teorema [Bettiol, L., Piccione, 2022]

Dos métricas homogéneas en espacios simétricos compactos de rango uno[2] son isospectrales si y sólo si son isométricas.

[2] i.e. $S^n, P^n(\mathbb{R}), P^n(\mathbb{C}), P^n(\mathbb{H}), P^2(\mathbb{O})$.

Unicidad espectral en esferas homogéneas

Teorema [Schmidt, Sutton, 2014]

Dos métricas homogéneas en S^3 son isospectrales si y sólo si son isométricas.

Teorema [Bettiol, L., Piccione, 2022]

Dos métricas homogéneas en espacios simétricos compactos de rango uno[2] son isospectrales si y sólo si son isométricas.

[2] i.e. $S^n, P^n(\mathbb{R}), P^n(\mathbb{C}), P^n(\mathbb{H}), P^2(\mathbb{O})$.

Unicidad espectral en espacios simétricos de rango ≥ 2

$M =$ espacio simétrico compacto irreducible.

Si $M \simeq \frac{G\times G}{G}$ (i.e. M es de tipo grupo), entonces $\mathcal{M}^G$ es grande y el problema de distinguir espectralmente g_0 en $\mathcal{M}^G$ es difícil.

Supongamos $M = G/K$ de tipo no grupo. Rango real uno ✓.
En rango real ≥ 2, se conocen métricas homogéneas no simétricas en:

- $\frac{\mathrm{SO}(2n)}{\mathrm{U}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SO}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}) = 2$.
- $\frac{\mathrm{SU}(2n)}{\mathrm{Sp}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SU}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(7)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(2)} \equiv \frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{G}_2}(\frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(8)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(3)} \equiv \frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{Spin}(7)}(\frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}) = 3$.

Problema

¿Existe isospectralidad entre estas métricas homogéneas?

Unicidad espectral en espacios simétricos de rango ≥ 2

$M =$ espacio simétrico compacto irreducible.

Si $M \simeq \frac{G\times G}{G}$ (i.e. M es de tipo grupo), entonces $\mathcal{M}^G$ es grande y el problema de distinguir espectralmente g_0 en $\mathcal{M}^G$ es difícil.

Supongamos $M = G/K$ de tipo no grupo. Rango real uno ✓.
En rango real ≥ 2, se conocen métricas homogéneas no simétricas en:

- $\frac{\mathrm{SO}(2n)}{\mathrm{U}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SO}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}) = 2$.
- $\frac{\mathrm{SU}(2n)}{\mathrm{Sp}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SU}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(7)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(2)} \equiv \frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{G}_2}(\frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(8)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(3)} \equiv \frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{Spin}(7)}(\frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}) = 3$.

Problema

¿Existe isospectralidad entre estas métricas homogéneas?

Unicidad espectral en espacios simétricos de rango ≥ 2

$M =$ espacio simétrico compacto irreducible.

Si $M \simeq \frac{G\times G}{G}$ (i.e. M es de tipo grupo), entonces $\mathcal{M}^G$ es grande y el problema de distinguir espectralmente g_0 en $\mathcal{M}^G$ es difícil.

Supongamos $M = G/K$ de tipo no grupo. Rango real uno ✓.
En rango real ≥ 2, se conocen métricas homogéneas no simétricas en:

- $\frac{\mathrm{SO}(2n)}{\mathrm{U}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SO}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}) = 2$.
- $\frac{\mathrm{SU}(2n)}{\mathrm{Sp}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SU}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(7)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(2)} \equiv \frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{G}_2}(\frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(8)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(3)} \equiv \frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{Spin}(7)}(\frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}) = 3$.

Problema

¿Existe isospectralidad entre estas métricas homogéneas?

Unicidad espectral en espacios simétricos de rango ≥ 2

- $\frac{\mathrm{SO}(2n)}{\mathrm{U}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SO}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}) = 2$.
- $\frac{\mathrm{SU}(2n)}{\mathrm{Sp}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{SU}(2n-1)}(\frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(7)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(2)} \equiv \frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{G}_2}(\frac{\mathrm{G}_2}{\mathrm{U}(2)}) = 3$.
- $\frac{\mathrm{SO}(8)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(3)} \equiv \frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}$, $\dim \mathcal{M}^{\mathrm{Spin}(7)}(\frac{\mathrm{Spin}(7)}{\mathrm{SO}(4)}) = 3$.

Teorema [L., Juan Rodríguez, $\geq$ 2023]

- Dos métricas $\mathrm{SO}(2n-1)$-invariantes en $\frac{\mathrm{SO}(2n-1)}{\mathrm{U}(n-1)}$ son isospectrales si y sólo si son isométricas
- La métrica simétrica en $\frac{\mathrm{SU}(2n)}{\mathrm{Sp}(n)} \equiv \frac{\mathrm{SU}(2n-1)}{\mathrm{Sp}(n-1)}$ es espectralmente distinguida entre las métricas $\mathrm{SU}(2n-1)$-invariante.

¡Muchas gracias!